

Zadanie

Je daná funkcia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definovaná nasledovne: $f(0)=0$ a $f(n+1)=3f(n)+14n+11$
Dokážte: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}; n \geq n_0: f(n) \leq 9 \cdot 3^n - 2009$

Dôkaz

Jedno z možných riešení je postup matematickou indukciou. Najprv dokážeme, že nerovnosť platí pre $n=4$ a potom druhý indukčný krok: že ak nerovnosť platí pre n pak platí aj pre $n+1$. Týmto by sme ukázali že nerovnosť platí pre všetky $n \geq 4$ a tým pádom číslo n_0 existuje - je to napríklad $n_0=4$ (ale aj všetky väčšie než 4).

$$\begin{aligned} & \mathbf{1)} \text{ vypočítame si hodnotu } f(n) \text{ pre } n=4 : f(0)=0 \Rightarrow f(1)=3 \cdot 0 + 0 + 11 = 11 \Rightarrow \\ & \Rightarrow f(2)=3 \cdot 11 + 1 \cdot 14 + 11 = 58 \Rightarrow f(3)=3 \cdot 58 + 2 \cdot 14 + 11 = 213 \Rightarrow \\ & \Rightarrow f(4)=3 \cdot 213 + 3 \cdot 14 + 11 = 692 \end{aligned}$$

Ak si $9 \cdot 3^n - 2009$ označíme ako $g(n)$, potom $g(4)=9 \cdot 3^4 - 2009 = 5471.5201$.
Môžeme teda zapísať, že $f(4) < g(4)$, lebo $692 < 5471.5201$. Prvý indukčný krok máme hotový.

$$\mathbf{2)} \text{ Teraz z predpokladu } f(n) < g(n) \text{ dokážeme } f(n+1) < g(n+1).$$

Vieme že $f(n) < g(n) = 9 \cdot 3^n - 2009 \Rightarrow 3f(n) < 3 \cdot 9 \cdot 3^n - 3 \cdot 2009$ (vynásobili sme tromi)

Potom $3f(n) + (14n+11) < 3 \cdot 9 \cdot 3^n - 3 \cdot 2009 + (14n+11)$ (pričítali sme $14n+11$)

Ale to je to isté ako $f(n+1) < 3 \cdot 9 \cdot 3^n - 3 \cdot 2009 + 14n + 11$ (z rekurzívnej definície $f(n)$)

-Ak by sa nám podarilo dokázať, že $3 \cdot 9 \cdot 3^n - 3 \cdot 2009 + 14n + 11 < g(n+1)$ *, potom by platilo, že $f(n+1) < 3 \cdot 9 \cdot 3^n - 3 \cdot 2009 + 14n + 11 < g(n+1)$ a teda $f(n+1) < g(n+1)$, čo je to, čo sme chceli dokázať.

* Dôkaz pomocnej vety $3 \cdot 9 \cdot 3^n - 3 \cdot 2009 + 14n + 11 < g(n+1) = 9 \cdot 3^{n+1} - 2009 = 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n - 2009$

Nerovnicu upravujeme: $3 \cdot 9 \cdot 3^n - 2 \cdot 2009 + 14n + 11 < 9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n$ (pričítali sme 2009)

$$14n - 4007 < (9 \cdot 3 - 3) \cdot 9 \cdot 3^n = 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n \text{ (odčítali sme } 3 \cdot 9 \cdot 3^n \text{)}$$

Tu už je platnosť nerovnice očividná, nakoľko ľavá strana začína hlboko v mínuse a prirátava sa k nej v jednom kroku ($n \rightarrow n+1$) len 14. Naproti tomu pravá strana sa každým krokom pre násobuje vyše deviatimi. Ak vám takýto dôkaz stačí, ďalej nemusíte čítať.

Ak ale chceme byť formalisti, nerovnosť $14n - 4007 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n$ dokážeme napríklad indukciou.

Keďže platí $14n - 4007 < 14n$, potom ak dokážeme $14n < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n$, bude nám platiť aj

$$14n - 4007 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n.$$

1) prvý indukčný krok: pre $n=1$ nerovnosť platí: $14 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3 = 58.59$

2) z predpokladu, že nerovnosť platí pre n vyvodíme jeho platnosť pre $n+1$

Indukčný predpoklad (IP): platí $14n < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n$. Chceme dokázať že $14(n+1) < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^{n+1}$

Z IP máme $14n + 14 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n + 14$.

Ale zároveň platí aj $6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n + 14 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n \cdot 9.3$ **, tým pádom aj $14n + 14 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n \cdot 9.3$, čo je to čo sme chceli dokázať.

** Prečo platí $6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n + 14 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n \cdot 9.3$? Lebo to je ekvivalentné s $14 < 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n \cdot 8.3$ (odčítali sme výraz $6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n$). A táto nerovnosť pre prirodzené čísla n určite platí (platí to pre $n=1$ a zároveň funkcia $6 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 3^n$ je rastúca na rozdiel od konštantnej 14)

Poznámka: funkcia $f(n)$ sa dala vyjadriť explicitným vzorcom (nie rekurzívnym). Tu sme to síce nepotrebovali, ale ak by sme nenašli počiatočné n pre ktoré by nerovnica platila (resp. pri inom zadani) tento postup by sa dal využiť. Skúste si $f(n)$ vyjadriť explicitne. Je to zábava.