Zadanie
Je daná funkcia $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ definovaná nasledovne: $f(0)=0$ a $f(n+1)=3f(n)+14n+11$. Vyjadrite ju explicitným vzorcom (t.j. nerekurzívnym, vyžadujúcim koštantný počet matematických operácii vzhľadom na n).

Riešenie
Skúsme si najprv napísať prvých pár členov funkcie $f(n)$: $f(0)=0$,
$f(1)=3\cdot f(0)+14\cdot 0+11=14\cdot 0+11=11$, $f(2)=3\cdot f(1)+14\cdot 1+11=3\cdot 11+14+11=$
$=4\cdot 11+14$, $f(3)=3\cdot f(2)+14\cdot 2+11=3\cdot(4\cdot 11+14)+14\cdot 2+11=13\cdot 11+5\cdot 14$

Podozrenie:
Už tu sme mohli poňať podozrenie, že všetky hodnoty funkcie (postupnosti) $f(n)$ sa dajú zapísať ako súčet násobkov čísel 11 a 14 , t.j. funkcia by bola v tvare $f(n)=11j+14š$. Overiť, či to tak naozaj je sa dá veľmi ľahko a to matematickou indukciou. Vidíme že $f(0)$ v tomto tvare je, pretože $f(0)=0=11\cdot 0+14\cdot 0$. Teraz provedeme indukčný krok: predpokladajme, že $f(n)$ je v tvare $f(n)=11j+14š$. Potom $f(n+1)=3f(n)+14n+11=3(11j+14š)+14n+11=$
$=11\cdot(3j+1)+14\cdot(3š+n)$ je znova v kýženom tvare $11j+14š$, čo sme chceli dokázať. Lenže ako nám to pomôže?

Cesty sa rozchádzajú:
Úlohu nám to zjednoduší. Označme si ako $j(n)$ postupnosť koeficientov v postupnsti $f(n)$ pri jedenástke ($j(n)$ bude mať takéto funkčné hodnoty: $j(0)=0$, $j(1)=1$, $j(2)=4$
$j(3)=13$ $\cdots$). Podobne si označme $š(n)$ funkciu koeficientov pri štrnástke ($š(0)=0$,
$š(1)=0$, $š(2)=1$, $š(3)=5$). Funkcia $f(n)$ bude v takomto tvare:
$f(n)=11j(n)+14š(n)$. Našim cieľom je teraz vyjadriť explicitne funkcie $j(n)$ a $š(n)$, vďaka čomu po dosadení do $f(n)=11j(n)+14š(n)$ dostaneme explicitný tvar $f(n)$.
Sledujme, aký majú vzťah koeficienty pre $f(n)$ a pre $f(n+1)$:

$$f(n+1)=3f(n)+14n+11=3(11j(n)+14š(n))+14n+11=11\cdot(3j(n)+1)+14(3š(n)+n)$$

Tu vidíme, že $j(n+1)=3j(n)+1$ a $š(n+1)=3š(n)+n$ (pripomínam $j(0)=0$ a $š(0)=0$)
Poďme teraz explicitne vyjadriť funkcie $j(n)$ a $š(n)$. Najprv $j(n)$:

J(n): Napíšeme si najprv prvých pár členov $j(n)$: $0,\ 1,\ 1+3,\ 1+3+3^2,\ 1+3+3^2+3^3,\ \dots$.
Nápadne sa to podobá na geometrický rad, pre ktorý platí: $q^0+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}=(q^n-1)/(q-1)$
(*Ak mi neveríte, skúste si roznásobiť* $(q-1)(q^0+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1})$ *, či vám vyjde* (q^n-1) .) .
Potom môžeme $j(n)$ zapísať ako $j(n)=(3^n-1)/(3-1)=(3^n-1)/2$.
Overiť platnosť tohoto vyjadrenia $j(n)$ môžeme dosadením $j(n)=(3^n-1)/2$ do jeho definície:
Najprv skontrolujeme $j(0)=\dfrac{3^0-1}{2}=\dfrac{0}{2}=0$, potom platnosť rekurzie: $j(n+1)=3j(n)+1$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{3^{n+1}-1}{2}=3\cdot\frac{3^n-1}{2}+1 \quad\Leftrightarrow\quad 3^{n+1}-1=3\cdot 3^n-3+2 \quad\Leftrightarrow\quad 3^{n+1}-1=3^{n+1}-1$$

Vzorec pre $j(n)=(3^n-1)/2$ sme týmto dokázali. Toto bolo ľahké, no zostáva nám ešte $š(n)$.

Š(n): Vypíšme si prvých pár členov $š(n)$: $š(0)=0,\ š(1)=0,\ š(2)=1,$
$š(3)=3š(2)+1=3\cdot 1+2$, $š(4)=3š(3)+3=3\cdot(3+2)+3=3^2+2\cdot 3+3$,
$š(5)=3\cdot š(4)+4=3\cdot(3^2+2\cdot 3+3)+4=3^3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^1+4$. Tu už je to trocha ťažšie, no vyzerá že aj členy $š(n)$ sledujú nejakú závislosť: máme tu klesajúce mocniny trojky, ale stúpajúce koeficienty pri nich. S trochou fantázie by sme $š(5)$ mohli napísať ako
$0\cdot 3^4+1\cdot 3^3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^1+4\cdot 3^0$, teda všeobecné $š(n)$ by vyzeralo nejako takto:

$\check{s}(n)=0\cdot 3^{n-1}+1\cdot 3^{n-2}+\ldots+(n-2)\cdot 3^1+(n-1)\cdot 3^0$ (na predstavenie skús dosadiť $n=5$). No pre jednoduchosť sa skúsme pridŕžať nášho $\check{s}(5)$. To si môžeme rozpísať ako

$$\check{s}(5)=3^3+2\cdot 3^2+3\cdot 3^1+4\cdot 3^0=(3^3+3^2+3^1+3^0)+(3^2+3^1+3^0)+(3^1+3^0)+(3^0)=$$

$$=\frac{3^4-1}{3-1}+\frac{3^3-1}{3-1}+\frac{3^2-1}{3-1}+\frac{3-1}{3-1}=\frac{3^4+3^3+3^2+3^1-(n-1)}{2}$$

Aby sme vzorec mali krajší, pridáme k nemu nulu v tvare $\frac{3^0-1}{2}$. Výsledok bude vyzerať:

$\check{s}(5)=\frac{3^4+3^3+3^2+3^1-(n-1)}{2}+\frac{3^0-1}{2}=\frac{3^4+3^3+3^2+3^1+3^0-n}{2}$. Tu však máme znova geometrickú prostupnosť $3^4+3^3+3^2+3^1+3^0$, čo napíšeme ako $(3^5-1)/2$, takže dostávame: $\check{s}(5)=((3^5-1)/2-n)/2$. Očakávame, keďže nám vyšiel takýto pekný tvar pre $\check{s}(5)$, pre $\check{s}(n)$ bude platiť niečo ako $\check{s}(n)=((3^n-1)/2-n)/2$. Znova- overíme platnosť $\check{s}(0)=0$: $\check{s}(0)=((3^0-1)/2-0)/2=0$. A teraz rekurzívny vzťah: $\check{s}(n+1)=3\check{s}(n)+n$. Platí nám?

$$\check{s}(n+1)=\frac{\frac{3^{n+1}-1}{2}-(n+1)}{2}\stackrel{?}{=}3\cdot\frac{\frac{3^n-1}{2}-n}{2}+n=3\check{s}(n)+n \quad\Leftrightarrow$$

$\frac{3^{n+1}-1}{2}-(n+1)\stackrel{?}{=}3\cdot\frac{3^n-1}{2}-n+2n \quad\Leftrightarrow\quad 3^{n+1}-1-2(n+1)=3^{n+1}-3+2n$, čo už platí. Týmto sme dokázali vzťah $\check{s}(n)=((3^n-1)/2-n)/2$.

Záver:

Dosaďme si naše ťažko vydobyté vzťahy $j(n)=\frac{3^n-1}{2}$ a $\check{s}(n)=\frac{\frac{3^n-1}{2}-n}{2}$ späť do funkcie $f(n)$: $f(n)=11j(n)+14\check{s}(n)=11\cdot\frac{3^n-1}{2}+7\cdot\left(\frac{3^n-1}{2}-n\right)=18\cdot\frac{3^n-1}{2}-7n=9\cdot 3^n-7n-9$

Naša hľadaná funkcia $f(n)$ má explicitný tvar $f(n)=9\cdot 3^n-7n-9$