

Dôkaz Pytagorovej vety

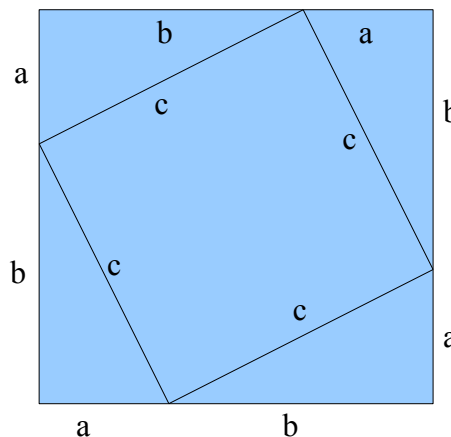
1) Vpísaním do štvorca

Do štvorca $(a+b) \times (a+b)$ vpišeme 4 pravouhlé Δ s rozmermi $a \times b$. Obsah celého štvorca je súčtom obsahu menšieho štvorca $(c \times c)$ plus 4 obsahy Δ . Teda:

$$S_{\text{štvorca}} = S_{\text{malého štvorca}} + 4 \cdot S_{\text{trojuholníka}}$$

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

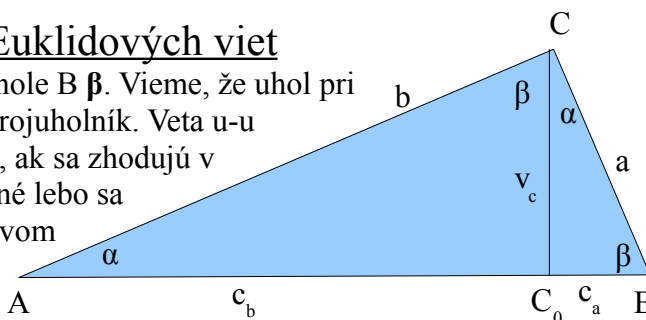


2) Euklidovými vetami

Z Euklidových viet o pravouhlom Δ vieme, že $a^2 = c_a \cdot c$ a $b^2 = c_b \cdot c$. Potom $a^2 + b^2 = c_a \cdot c + c_b \cdot c = c(c_a + c_b) = c^2$.

Dôkaz Euklidových viet

Označme uhol pri vrchole A α a uhol pri vrchole B β . Vieme, že uhol pri vrchole C je 90° , lebo sa jedná o pravouhlý trojuholník. Veta u-u pre podobnosť Δ vraví, že 2 Δ sú si podobné, ak sa zhodujú v dvoch uhloch. ΔABC a ΔACC_0 sú si podobné lebo sa zhodujú v uhle α (pri vrchole A) a v uhle pravom (jeden v bode C, druhý v bode C_0). Takisto sú si podobné ΔABC a ΔCBC_0 .



Vďaka podobnosti ΔABC a ΔACC_0 môžeme dať ich strany do pomeru: $\frac{b}{c} = \frac{c_b}{b} \Rightarrow b^2 = c \cdot c_b$

To isté môžeme urobiť s ΔABC a ΔCBC_0 : $\frac{a}{c} = \frac{c_a}{a} \Rightarrow a^2 = c \cdot c_a$.

Analogicky vďaka u-u sú podobné ΔACC_0 a ΔCBC_0 , z toho vyvodíme: $\frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \Rightarrow v_c^2 = c_a \cdot c_b$

Odvodili sme všetky 3 Euklidove vety o odvesnách.

Stredový a obvodový uhol

Veta o stredovom a obvodovom uhle tvrdí (tu konkrétne), že

$2|\angle AXB| = |\angle ASB|$, teda stredový uhol ($\angle ASB$) je dvakrát väčší než obvodový ($\angle AXB$). Musí však platiť, že X sa nachádza vo vonkajšom kružnicovom oblúku \widehat{AB} (vnútorný je ten menší). Inak to neplatí.

Označme $\angle AXS$ ako α , a $\angle BXS$ ako β . ΔAXS a ΔBXS sú oba rovnoramenné (lebo majú po dvoch stranách polomery kružnice). Preto $\angle XAS = \angle AXS = \alpha$ a $\angle XBS = \angle BXS = \beta$. V týchto Δ poznáme dve strany, tretiu dopyčítame (súčet má byť 180°)

$$\alpha + \alpha + \angle ASX = 180^\circ \Rightarrow \angle ASX = 180^\circ - 2\alpha$$

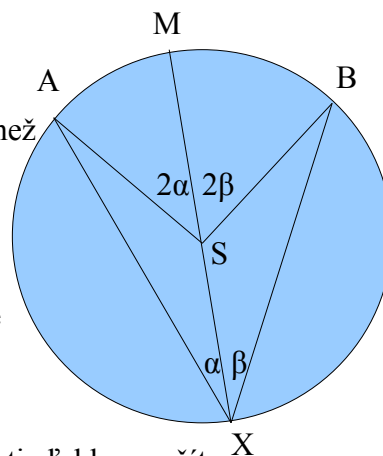
$$\beta + \beta + \angle BSX = 180^\circ \Rightarrow \angle BSX = 180^\circ - 2\beta$$

Uhly $\angle ASM$ a $\angle BSM$ sú uhly susedné (spolu dávajú priamy 180°), tie ľahko spočítame

$\angle ASM = 2\alpha$ $\angle BSM = 2\beta$. Tie keď spočítame dostaneme $\angle ASB = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$, ktorý vidíme, že je dva krát väčší od $\angle AXB = \alpha + \beta$.

- Treba ešte dokázať špeciálny prípad, kedy je bod X položený tak, že priamky AS a AX (alebo BS a BX) splývajú (vtedy nám stačí rátať len jednu polovicu uhla (α alebo β) nakoľko je druhá nulová)

- Ďalší prípad nastáva ak je X tak, že S sa nenachádza v ΔABX (napr. keď je X dost' vpravo). Vtedy nám výjdu obdobné vzťahy pre α a β , lenže pri výslednom uhle ich musíme odčítať.



Vzorec pre polomer vpísanej kružnice pravouhlému Δ

Dotyčnica je na polomer vždy kolmá a preto sú pri bodoch K, L a M pravé uhly.

ΔABC je pravouhlý a preto je pravý uhol aj pri bode C. Pravý uhol pri bodoch

C, K a L implikuje pravý uhol pri vrchole S (už len preto aby bol súčet uhlov 360°). $\square KCLM$ je preto štvorec so stranou dĺžky ρ .

Nakoľko sú strany AC a BC označené aj ako **b** a **a**,

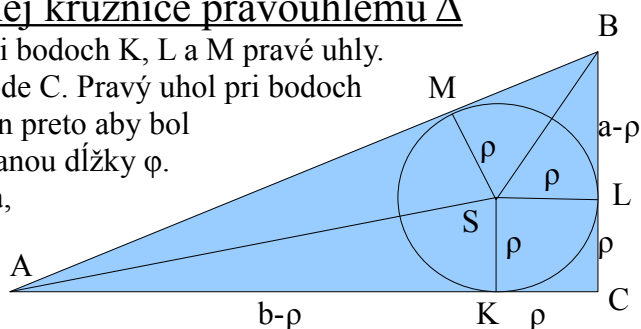
môžeme potom vyjadriť

$$AK = AC - KC = b - \rho$$

$$AL = BC - LC = a - \rho$$

Vpísaná kružnica leží na prieseku osí uhlov. Pri bodoch A a B sa teda delí uhol na polovice. To zároveň znamená že ΔASK je zhodný s ΔASM (podľa vety u-s-u, majú zhodný uhol pri vrchole A, ďalej spoločnú stranu AS a zhodný pravý uhol) Teda $AM = AK = b - \rho$. Obdobne postupujeme pri vrchole B a ΔBSL a ΔBSM . Dostaneme $BM = BL = a - \rho$. Stranu **c** vieme napísať ako:

$$c = AM + BM = (a - \rho) + (b - \rho) = a + b - 2\rho = c \Rightarrow \rho = \frac{a + b - c}{2}$$



Vzťah pre obsah Δ a polomer vpísanej kružnice vo všeobecnom Δ

Tu si musíme uvedomiť, že obsah celého ΔABC sa dá

vyjadriť ako súčet troch Δ s výškou ρ a základňami

(postupne) **a**, **b** a **c**. Zapišme:

$$S_{ABC} = \frac{(a \cdot \rho)}{2} + \frac{(b \cdot \rho)}{2} + \frac{(c \cdot \rho)}{2} = \rho \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} \right) = \rho \cdot s$$

