

Deliteľnosť štyrmi

-číslo c je deliteľné 4 práve vtedy ak jeho posledné dvojčísle je deliteľné 4.

-Dôkaz priamy:

- c môžeme zapísať ako $c = 100a + b$ (rozložíme ho na stovky a posl. Dvojčísle)

Máme dokázať že: $4|c \Leftrightarrow 4|b$

Túto ekvivalenciu musíme dokázať dvoma implikáciami:

1) $4|c \Rightarrow 4|b$

Keďže $4|c$, môžeme c zapísať ako $c=4k$ (k je prir. Číslo)

$$\text{Potom } c = 100a + b \Rightarrow c - 100a = b \Rightarrow 4k - 4 \cdot 25a = b \Rightarrow 4(k - 25a) = b$$

Ľavá strana je deliteľná 4, musí byť teda i pravá teda $4|b$

2) $4|b \Rightarrow 4|c$

Keďže $4|b$, môžeme b zapísať ako $b=4k$ (k je prir. Číslo)

$$\text{Potom } c = 100a + b \Rightarrow c = 100a + 4k \Rightarrow c = 4 \cdot 25a + 4k \Rightarrow c = 4(25a + k)$$

Pravá strana je deliteľná 4, musí byť teda i ľavá teda $4|c$

Prvočísel je nekonečne veľa

-Dôkaz sporom: uvažujme, že ich je konečný počet a úvahami dojdeme ku sporu.

Nech je prvočísel konečný počet n . Označme ich $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ zoradené podľa veľkosti. Keď spravíme číslo vzniknuté súčinom všetkých prvočísel a pripočítaním 1, dostaneme číslo

$$c = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1 \quad . \text{ Toto číslo môže byť buď zložené číslo, alebo prvočíslom.}$$

-Ak by bolo zložené, musí byť deliteľné niektorým z prvočísel, ale to nieje, pretože má po delení každým z nich zvyšok rovný jednej (číslo o 1 menšie by malo zvyšok 0, nakoľko je deliteľné všetkými prvočíslami).

-Ak by bolo prvočíslom je určite väčšie než ktorékoľvek z $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ a teda vzniklo nové prvočíslom, čo je však spor s tým, že sme na začiatku označili všetky prvočísla.

AG nerovnosť

-Aritmetický priemer je vždy väčší alebo rovný geometrickému

-Dôkaz priamy, algebraicky (dá sa i geometricky dokázať)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad | \cdot 2 \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad |^2 \quad (\text{umocniť môžeme lebo sú obe strany rovnice}$$

$$\text{kladné}) \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \quad | -4ab$$

$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$ Vieme, že druhá mocnina čísla je vždy väčšia-rovná nule. Tým je úloha dokázaná.

Ak gama je 45° potom $S_\Delta = (a^2 + b^2 - c^2)/4$

-dôkaz priamo

$$\text{Pre } \Delta \text{ platí vzorec pre výpočet obsahu } S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin(\text{gama}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin(45^\circ) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{4} \Rightarrow 4S = ab\sqrt{2}$$

$$\text{Zároveň platí kosínusová veta: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\text{gama}) = a^2 + b^2 - 2ab \cos(45^\circ) =$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 + b^2 - ab\sqrt{2} \text{ keďže } ab\sqrt{2} = 4S \text{ tak}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S \Rightarrow 4S = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow S = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4} \quad \text{Čo je to čo sme chceli dokázať.}$$

Logaritmus súčinu je súčet logaritmov

-dokazujeme $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

-dôkaz priamo

Vieme, že $x = a^{\log_a x}$ potom aj $xy = a^{\log_a xy}$

$xy = xy \Rightarrow a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a xy} \Rightarrow a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a xy}$ rovnicu zlogaritmuje
A dostaneme: $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$

Poznámka: veta $x = a^{\log_a x}$ vyplýva z definície logaritmu:

def. pre logaritmus $y = \log_a(x)$ platí že: $x = a^y$ Potom $x = a^{\log_a(x)}$ (iba dosadíme)

Odmocnina z 2 je iracionálna

-dokazujeme $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

-dôkaz sporom, predpokladajme, že je racionálna a dojdeme ku sporu

-keďže je racionálna, môžeme ju vyjadriť zlomkom $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Zlomok vieme upraviť do základného tvaru, kedy sú p a q nesúdeliteľné a teda majú najväčšieho spoločného deliteľa 1. $D(p, q) = 1$ (dali sme si podmienku)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow q\sqrt{2} = p \quad (\text{umocnime}^2) \Rightarrow 2q^2 = p^2 \quad 2 \text{ delí } (2q^2) \text{ tak musí deliť i } p^2.$$

Teraz nastupuje **Lemma** $2|p^2 \Rightarrow 2|p$, ktorú dokážeme neskôr. Každopádne z nej vyplýva že 2 delí p (keďže delí p^2) Potom môžeme p napísať ako $p = 2k$ kde k je nejaké prirodzené číslo. Potom $2q^2 = p^2 \Rightarrow 2q^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ Keďže 2 delí pravú stranu, musí aj ľavú. 2 delí q^2 , použitím lemy dostaneme 2 delí q .

-Dospeli sme k zvláštnemu záveru, že 2 delí p , aj q . Potom by mali ale spoločného deliteľa minimálne 2, čo je však spor.

Dôkaz lemy: $2|p^2 \Rightarrow 2|p$

-dôkaz nepriamo: veta obmenená $2 \nmid p \Rightarrow 2 \nmid p^2$ Teda ak je 2 nepárne tak aj jeho druhá mocnina má byť nepárna.

Nepárne p zapíšeme $p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) potom

$$p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2z + 1 \quad (z \in \mathbb{N})$$

Keďže p^2 je v tvare $2z + 1$, je nepárne a tým sme lemmu dokázali.

12 delí $n^5 - n^3$

$n^5 - n^3 = n^3(n^2 - 1) = n^3(n - 1)(n + 1) = n^2(n - 1)n(n + 1)$ Musíme dokázať že je tento výraz deliteľný aj 3-mi, aj 4-mi. -dôkaz priamy.

1) deliteľnosť 3: Výraz obsahuje súčin troch po sebe idúcich čísel - určite bude jedno z nich deliteľné 3-mi a teda je del. 3 aj celý výraz (keby sme to chceli dokázať exaktnejšie, zvolili by sme si za n postupne $3k, 3k + 1, 3k + 2$, (podľa zvyškov po delení tromi) a v každom prípade vyjde výraz deliteľný tromi - trojku tam vyjmeme)

2) deliteľnosť 4: Ak je n párne, teda $n = 2k$ potom výraz je $4k^2(2k - 1)2k(2k + 1)$ Vidíme že je deliteľný štyrmi.

Ak je n nepárne, teda $n = 2k + 1$, výraz bude $(2k + 1)^2(2k)(2k + 1)(2k + 2)$.

Z druhej a štvrtej zátvorky vieme vyňať dva a dostaneme:

$$4(2k + 1)^2 k(2k + 1)(k + 1) \quad \text{- je deliteľný 4-ma}$$

-v oboch prípadoch je výraz deliteľný 4.

Výraz je deliteľný 3-mi aj 4-mi a teda aj 12-timi.